

А. М. МОЛЧАНОВ

Научно-исследовательский
вычислительный центр АН СССР

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ

Введение.

**Экстремальные состояния
как поворотные точки эволюции**

Биологические системы сложны. Это высказывание используется в самых различных целях. Математики используют его, чтобы объяснить весьма незначительный успех большинства попыток моделирования, а биологи — как защитное средство от вторжения непрошенных помощников и советчиков. Полезно уточнить это бесспорно верное высказывание.

Всегда ли биологические системы сложны?

Этот вопрос вызывает серьезные разногласия среди математиков и биологов. Интересно, что отрицательный ответ (равно как и положительный) дает часть биологов и часть математиков — раздел происходит по методологии, а не по профессии.

Но даже те, кто согласен, что биологические системы сложны не всегда, делятся на две резко оппозиционные группы. Одни считают, что простыми биологические системы бывают на краю гибели и что поэтому такие состояния нетипичны и бесполезны для понимания живых, функционирующих систем.

Другие согласны с первыми в том, что простыми бывают лишь патологические состояния, однако именно в изучении крайних, экстремальных состояний видят ключ к изучению нормы. Ясно, что симпатии автора на стороне этих «других», и небольшой, но поучительный пример поясняет такое предпочтение. Известно, что в эмбриогенезе существует стадия *морулы*, на которой все внутренние клетки *гибнут* и *растворяются*, служа всего лишь субстратом для внешних, поверхностных клеток, из которых возникает все тканевое разнообразие, все функциональное богатство будущего организма. Это не более чем иллюстрация, но она заставляет предполагать, что экстремальные состояния, близкие к гибельным, существенны для нормального функционирования и уж во всяком случае заслуживают внимательного рассмотрения.

Вспомним теперь, что индивидуальное развитие повторяет (конечно в упрощенной и модифицированной форме) развитие вида, его эволюцию. Естественно, подобные катастрофические ситуации играли важную роль в эволюции. Возможно, что они были точками выбора, разветвления, расхождения в разные стороны ранее близких, однотипных путей развития. Возникает желание связать математическое понятие «точки бифуркации» с биологическим, эволю-

ционным понятием дивергенции, а также попытаться придать ясный и простой, хотя, конечно, всего лишь модельный смысл этим понятиям эволюционной теории.

При изучении биологических систем необходимо учитывать три главные особенности: 1) высокую внутреннюю подвижность; 2) их существенную нелинейность и 3) полифакторность внешней среды. Это делает мало перспективными попытки дедуктивного, аксиоматического построения теории.

В статье обсуждается альтернативная возможность — феноменологический подход к математической теории эволюции. Основой является глубокое сходство понятий нелинейной теории колебаний и функциональных идей теории эволюции.

В критических моментах эволюции структурная сложность онологических систем отступает на второй план. Ведущими оказываются сравнительно простые кинетические свойства, допускающие математическое описание.

Громоздкость многомерных систем

Развитие квантовой химии — «теории молекул» шло практически параллельно с развитием квантовой механики — «теории атома». Тем разительнее контраст между глубиной и завершенностью нерелятивистской квантовой механики и разрозненными частными результатами квантовой химии. Оказалось, что даже глубокое знание структуры атома не приводит * автоматически к пониманию свойств молекул.

Более того, выяснилось, что многие важные свойства молекул вообще не зависят от деталей строения атомов. В некоторых случаях оказалось даже несущественным, какую модель атома положить в основу — грубую (но зато простую) классическую или значительно более тонкую квантовую.

Можно думать, что это одно из многочисленных и неожиданных проявлений закона больших чисел. Число электронов, а тем более различных парных взаимодействий оказывается довольно большим даже для небольших молекул. Это приводит к двум важным следствиям.

Во-первых, с некоторого момента становится бесполезным дальнейшее уточнение свойств малой компоненты (в данном случае атома) для понимания структуры и поведения всей системы (в данном случае молекулы).

Во-вторых, оказывается непосильной задача описания структуры и поведения системы на основе анализа точных уравнений, за дающих взаимодействие всех ее компонент.

Поясним эту важную мысль на примере молекулы бензола [1]. Нет сомнений, что уравнение Шредингера, если бы его удалось ре-

* На современном этапе глубокие результаты молекулярной биологии не отменяют необходимости независимого исследования клеточных структур и органелл.

шить или численно проинтегрировать, дало бы точную структуру и детали временного поведения молекулы бензола. Но все дело в этом «если бы». Молекула бензола содержит 24 валентных электрона. Поэтому уравнение Шредингера надлежит писать в 72-мерном пространстве ($72 = 24 \times 3$), даже если пренебречь движением атомов. Это приводит к разностной схеме, содержащей 10^{72} точек. При современных скоростях ($n = 10^9$ операций в секунду) потребуется $10^{72-9} = 10^{63}$ с $\approx 10^{55}$ лет для просчета одного шага по такой схеме.

Ясно, что такая степень трудности равносильна прямой невозможности.

Сверхчувствительность к изменению параметров

Большое количество независимых переменных — «проклятие размерности» — имеет еще один математический аспект. С формальной точки зрения существует теорема, гарантирующая непрерывность решения при изменении параметров системы. Однако характер этой непрерывности оказывается весьма экзотичным при большой размерности системы.

Рассмотрим простой пример линейной системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \lambda_1 x_1 + a_2 x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda_2 x_2 + a_3 x_3, \\ &\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= \lambda_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n, \\ \frac{dx_n}{dt} &= \varepsilon a_1 x_1 + \lambda_n x_n. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если в этой системе $\varepsilon = 0$, то она становится треугольной, а собственные числа совпадают с числами, стоящими по диагонали. Поэтому если все λ_i отрицательны

$$\lambda_i < -p < 0, \quad (2)$$

то положение равновесия устойчиво. Теорема о непрерывной зависимости от параметра гарантирует сохранение этой устойчивости при достаточно малом значении параметра ε .

Присмотримся, однако, к реальным числам. Несложно написать в общем виде вековое уравнение для системы (1):

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2), \dots, (\lambda - \lambda_n) + (-1)^{n-1} a_1 a_2 a_3 \cdot \dots \cdot a_n \varepsilon = 0. \quad (3)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ собственные числа $\lambda_i(\varepsilon)$ стремятся к λ_i , как это и полагается по общей теореме. Рассмотрим для ориентировки частный случай, когда все λ_i равны между собой

$$\lambda_i = -p, \quad (4)$$

и все a_i равны между собой

$$a_i = a. \quad (5)$$

В этом случае уравнение (3) можно решить. (Достаточно сказать, чтобы невозмущенная система имела n -кратный корень):

$$\lambda = -p + re^{\frac{2k+n-1}{n}\pi_i}. \quad (6)$$

Следовательно, все собственные числа расположены на окружности с центром в точке $\lambda = -p$ (рис. 1).

Радиус этой окружности зависит от ε :

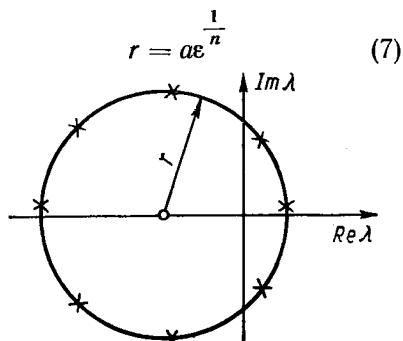


Рис. 1. Собственные числа на комплексной плоскости.

Рис. 2. Вид зависимости r от ε при больших n .

и, согласно теореме, стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Однако зависимость r от ε чрезвычайно велика, даже если n не очень большое (рис. 2).

Так, например, уже при $n = 20$, $p = 1$, $a = 2$ изменения ε всего лишь в пятом знаке достаточно, чтобы система потеряла устойчивость.

Полезно в связи с этим заметить, что во многих [2] американских работах (особенно относящихся к направлению имитационного моделирования (simulation modelling) беззаботно толкуют о системах, содержащих многие десятки и даже сотни переменных.

Эффекты нелинейности

Существенная нелинейность биологических систем также приводит к резким изменениям свойств при небольших изменениях параметров. В работе [3] разбираются математические свойства простейшей модели [4] гликолиза:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - xy^2, \\ \dot{y} = xy - y. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь x и y — концентрации некоторых соединений, а параметр α задает внешний поток субстрата в систему. Оказывается, что весьма умеренные изменения внешнего потока α приводят к бурным и драматическим следствиям в поведении системы. Опишем качественно происходящие события [4].

При достаточно обильном «питании», а именно при $\alpha \geq 1$, система работает в стационарном режиме и «нарабатывает» субстрат в продукт с постоянной скоростью α .

При $\alpha = 1$ в системе возникает устойчивый предельный цикл, субстрат по-прежнему целиком перерабатывается в продукт, однако при постоянном входе выход становится переменным, циклическим. Часть периода система накапливает субстрат, а другую часть использует для выработки продукта.

С уменьшением внешнего потока работа системы становится все более «лихорадочной», все длиннее «пустые» периоды накопления, все короче «рабочие» циклы.

Наконец, при некотором критическом значении параметра α

$$\alpha = \alpha_{\text{кр}}$$

внешний поток монотонно стремится к нулю, идет бесполезное накопление субстрата в системе.

В той или иной степени описанные явления могут происходить в любой проточной системе. Однако в приведенной системе эти свойства проявляются особенно ярко. Достаточно сказать, что все эти события разворачиваются при изменении внешнего потока α меньше чем на двадцать процентов! (рис. 3).

Биологические и небиологические системы

Ясно, что рассмотренные свойства не являются исключительной принадлежностью именно биологических систем. Аналогичные явления могут возникать и возникают и при развитии (эволюции) иных сложных систем. Примерами могут служить: эволюция звезд и возникновение планетной системы; геологические процессы на Земле в целом или судьба данного речного бассейна; история возникновения, совершенствования и практически полного исчезновения паровозов, как транспортного средства, и даже (с очень существенными оговорками) некоторые социальные явления.

Однако есть весьма существенная разница между биологическими и небиологическими системами. Конечно, для каждого свойства можно указать небиологическую систему, обладающую заданным свойством, и даже изучать это свойство, так сказать, в чистом

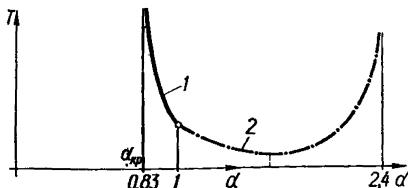


Рис. 3. Зависимость периода T от величины внешнего потока α : 1 — период предельного цикла; 2 — период малых колебаний при возвращении в положение равновесия.

виде, именно на такой системе. Но биологические системы обладают обычно полным «ассортиментом» всех таких сложных и не-привычных особенностей, и трудной становится противоположная задача — найти такую биологическую систему, которая *не обладала бы* заданным сложным типом поведения или структуры.

Стационарные режимы. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Пуанкаре

История физического естествознания оставила в наследство естествознанию биологическое понимание существенной роли стационарных режимов. Теория устойчивости Ляпунова была первоначально создана для тщательного изучения сравнительно узкой задачи — устойчивости грушевидных форм вращения жидких тел. Сейчас, однако, все более ясно, что созданный Ляпуновым алгоритм изучения вопросов устойчивости сохраняет значение для более широкого круга проблем.

Если поведение системы описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (9)$$

то стационарное состояние определяется такой системой уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n; \vec{\alpha}) = 0, \\ f_2(x_1, \dots, x_n; \vec{\alpha}) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n; \vec{\alpha}) = 0. \end{array} \right\} \quad (10)$$

Если

$$x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n \quad (11)$$

— решение этой системы конечных уравнений (10), то для определения устойчивости надо построить матрицу

$$A = ((A_{ik})) = \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) \right)_{x_i=a_i}, \quad (12)$$

и тогда вопрос об устойчивости стационарного состояния (11) решается вычислением корней характеристического уравнения

$$P(\lambda) = \det((A_{ik} - \lambda \delta_{ik})) = 0. \quad (13)$$

Корни характеристического уравнения оказываются, конечно, зависящими от параметров

$$\lambda = \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (14)$$

поскольку и координаты стационарной точки

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = a_1(\alpha_1, \dots, \alpha_k), \\ a_2 = a_2(\alpha_1, \dots, \alpha_k), \\ \vdots \\ a_n = a_n(\alpha_1, \dots, \alpha_k), \end{array} \right\} \quad (15)$$

и коэффициенты матрицы A являются функциями параметров системы.

Кинетика системы вблизи стационарной точки полностью определяется собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Теорема Пуанкаре [5] выясняет глубокий смысл этого обстоятельства. Эта теорема утверждает, что линейная диагональная система

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n \end{array} \right\} \quad (16)$$

— есть *каноническая* форма произвольной нелинейной системы. Существует такая замена переменных:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = P_1(y_1, \dots, y_n), \\ x_2 = P_2(y_1, \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \\ x_n = P_n(y_1, \dots, y_n), \end{array} \right\} \quad (17)$$

которая приводит произвольную систему (9) к нормальной, канонической, линейной форме (16).

Следует подчеркнуть два обстоятельства.

Во-первых, теорема верна только для случая, когда все собственные числа лежат целиком в полуплоскости комплексного переменного λ (проблема малых знаменателей). Это условие автоматически выполнено для устойчивых стационарных точек, когда

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad (18)$$

и, следовательно, все собственные числа лежат в левой полуплоскости.

Во-вторых, замена переменных (17) определена только в некоторой достаточно малой окрестности стационарной точки (не содержащей, в частности, никакой другой стационарной точки или предельного цикла).

Структурная устойчивость

Устойчивость по Ляпунову означает малое изменение траектории движения при малом изменении начальных данных. Однако во многих вопросах, особенно биологических, требуется знание изменения траектории при малом изменении внешней среды, а не внутреннего состояния системы. Математически это соответствует изменению параметров системы $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, а не фазовых переменных x_1, \dots, x_2 . Оказывается, что эти два типа устойчивости связаны друг с другом. Опишем более точно эту связь.

Предположим, что параметры заданы и система находится в стационарной точке a , соответствующей точке α пространства параметров. Изменим значения параметров, переведя их в точку β . Равновесие нарушится, так как состоянию β соответствует равновесная точка b , отличающаяся от a . Возникает переходный процесс — движение в точку b (рис. 4).

Если в состоянии α система была устойчива по Ляпунову (более точно асимптотически устойчива), а сдвиг $\alpha \rightarrow \beta$ был выбран небольшим, то система остается устойчивой и в точке β . Это вы-

текает из непрерывной зависимости собственных чисел λ от параметров системы.

Структурный сдвиг $\alpha \rightarrow \beta$ мы можем интерпретировать иначе. Мы можем считать, что система уже находилась в состоянии β , но мы изменили начальные данные, поместив систему в точку a .

Эквивалентность структурной перестройки $\alpha \rightarrow \beta$ фазовому сдвигу $b \rightarrow a$ (обратный порядок!) позволяет применить к этой ситуации методы теории устойчивости Ляпунова.

Рис. 4. Переходный процесс $a \rightarrow b$, соответствующий переключению параметров $\alpha \rightarrow \beta$.

Можно, в частности, оценить (при достаточно малом сдвиге $\alpha \rightarrow \beta$) время возвращения в равновесие — длительность переходного процесса.

Чисто формально это время равно, конечно, бесконечности, но как всегда в таких случаях время оценивают временем уменьшения отклонения в « l » раз.

Нетрудно показать, что это время релаксации определяется наименьшей величиной p действительных чисел $p_i = \operatorname{Re} \lambda_i$ системы в точке β .

Итак, время релаксации может быть найдено по формуле

$$T_{\alpha \rightarrow \beta} = -\frac{1}{p(\beta)}. \quad (19)$$

Знак минус в этой формуле возникает, конечно, из-за отрицательности всех p_i в точке устойчивого равновесия. Для дальнейшего полезно выписать отношение времен релаксации для прямого и обратного процессов:

$$\frac{T_{\beta \rightarrow \alpha}}{T_{\alpha \rightarrow \beta}} = \frac{p(\alpha)}{p(\beta)}. \quad (20)$$

Динамическая асимметрия

Из формулы (20) вытекают важные следствия относительно характера переходных процессов для состояний, близких к критическому. Рассмотрим сечение пространства параметров какой-нибудь плос-

костью. Это делается только для наглядности. Рассуждения не зависят от размерности пространства параметров и числа фазовых переменных. Суть дела в том, что мы рассматриваем окрестность гиперповерхности нейтральности — поверхности, пересечение которой приводит к потере устойчивости стационарного режима. На самой поверхности корень может становиться либо чисто мнимым (откуда и происходит название линия нейтральности, а слово «линия»,

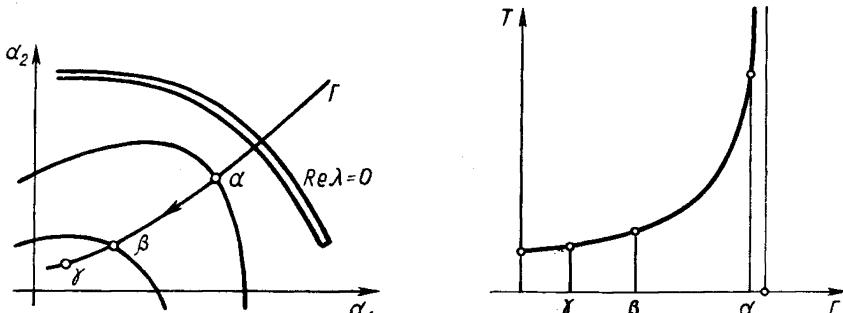


Рис. 5. Линии уровня функции $p(\alpha) = \operatorname{Re}\lambda$. Пересечение с плоскостью α_1, α_2 . Выделен критический уровень $\operatorname{Re}\lambda = 0$ — линия нейтральности.

Рис. 6. Время релаксации к равновесию. Взят разрез вдоль кривой Γ (рис. 5). Величина ординаты над точкой y изображает время релаксации к положению равновесия, соответствующему этой точке пространства параметров.

вместо поверхность, отражает традицию ограничиваться двумерным структурным пространством), либо нулевым (рис. 5).

Линии уровня $\operatorname{Re}\lambda = \text{const}$ на этом графике соединяют состояния с одинаковым временем релаксации к положению равновесия. Это время растет по мере приближения к линии нейтральности и обращается в бесконечность на самой линии (рис. 6).

Отсюда вытекает существенный вывод. Вблизи линии нейтральности система приобретает резко выраженную асимметрию.

Приближение к линии нейтральности вызывает длительный переходный процесс, удаление от линии нейтральности приводит к быстрому установлению стационарного режима. Это легко понять, рассматривая формулу (20), показывающую, что отношение времен прямого и обратного перехода может быть весьма значительным.

Любопытно, что это обстоятельство было обнаружено экспериментально при запуске ректификационных колонн. Однако авторы сочли этот факт специфической особенностью технологического процесса, поэтому общая причина этого явления ускользнула, по-видимому, от их внимания. Эффект был воспроизведен на математической модели ректификационной колонны и послужил побудительной причиной для поисков внутренней кинетической причины, не зависящей от деталей конкретного строения системы.

Этой главной причиной оказывается запас устойчивости, близость режима к экстремальным, неустойчивым состояниям.

Эволюционная роль экстремальных режимов

Затягивание системы в экстремальные состояния может быть про- слежено на примере любой эволюционирующей системы. Интересно, что технические системы обнаруживают и в этом отношении принципиальное сходство с системами биологическими. Ограничимся одним примером.

Развитие авиации долгое время шло под знаком борьбы за скорость. Увеличение взлетной, а особенно посадочной скорости привело к тому, что упругость пневматиков шасси в принятой тогда трехколесной схеме стала причиной драматического явления, известного под названием «шимми». Этот пример особенно любопытен потому, что абстрактная «степень свободы», выходящая первой на границу устойчивости, имела здесь вполне зримые очертания переднего колеса, начинавшего «вихлять» при возраставших посадочных скоростях.

В других случаях (например, «фляттер») совсем не так легко было выделить ту «слабую степень свободы», которая первой подвергалась воздействию «эволюционного отбора». Поучительно, что эволюция технических устройств обнаруживает те же основные закономерности «борьбы за существование» и «выживание приспособленных», что и эволюция биологических систем не только на организменном, но и на популяционном уровне.

Мягкое и жесткое возбуждение колебаний

Исторически первая аккуратная математическая модель была построена А. А. Андроновым [6] для лампового генератора. Современное изложение, простое и наглядное, можно найти в работе [7]. Однако долгое время считалось, что схема возбуждения колебаний является специфической особенностью, если не электротехнических схем, то, во всяком случае, двумерных динамических систем.

Анализ окрестности линии нейтральности, проведенный в работе автора [8], показал, что двумерные системы являются канонической формой общих систем.

Имеет место пока еще, к сожалению, недоказанный аккуратно аналог теоремы Пуанкаре для общих систем. В окрестности линии нейтральности *любая* система может быть приведена (надлежащей заменой переменных) к следующей канонической форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= pr + qr^3 + ar^5 + \dots, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega + \mu r^2 + vr^4 + \dots \\ \frac{dz_i}{dt} &= \lambda_i(r) z_i. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Здесь r и φ — амплитуда и фаза возбуждающейся степени свободы, а z_i — канонические переменные, сохраняющие стационарное состояние $z_i = 0$. Таким образом, система остается линейной, как в теореме Пуанкаре, по всем «квазистационарным» переменным z_i , становится существенно нелинейной по основным переменным r и φ , образующим возбужденную степень свободы.

Качественный характер возникающих колебаний совершен-но такой же, как в случае одной степени свободы. Это видно из того, что уравнение для r не содержит квазистационарных переменных z_i , хотя в уравнение для z_i это переменное r входит существенным образом.

Полезно изобразить «структурный портрет» возникающей системы (рис. 7). Возникающие здесь явления подробно разобраны в работе [9]. Особенno существенно явление гистерезиса, неизбежно проявляющееся при переходе линии нейтральности в жестком режиме возбуждения колебаний.

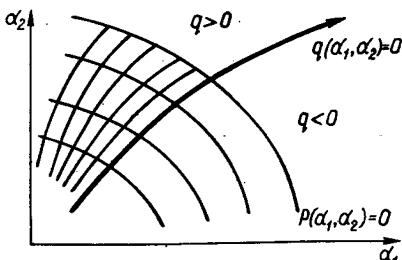


Рис. 7. Кривые $p(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ и $q(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ разбивают плоскость параметров α_1, α_2 на четыре области соответственно комбинациям знаков величин r и q .

Комбинированные экстремальные режимы

В рамках настоящего сообщения невозможен сколько-нибудь подробный анализ как раз наиболее интересных и перспективных экстремальных режимов. Ограничимся поэтому в порядке постановки вопроса указанием на самые актуальные задачи.

Во-первых, необходимо проанализировать явление бифуркации стационарной точки. Выше разобрано пересечение линии нейтральности. Это явление порождается обращением в нуль действительной части комплексного корня

$$P = \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad (22)$$

которому соответствует (в линейном приближении) инвариантная плоскость (r, φ) .

Совершенно аналогично (но более просто) можно разобрать случай обращения в нуль действительного корня

$$\mu = 0. \quad (23)$$

Есть серьезные основания предполагать, что такие важные биологические феномены, как дифференцировка ткани или изоляция видов имеют в основе своих математических моделей именно бифуркацию стационарной точки.

И в этом случае существуют аналоги мягкого («расхождение») и жесткого («взрыв») эволюционного пути. Эволюционирующая

система в своем развитии может пересекать как линии нейтральности (22), так и линии бифуркации (23). Нет никаких априорных оснований предпочитать один тип усложнения другому.

Но если это так, то система, прошедшая через десять критических точек в своем развитии, имеет больше тысячи ($2^{10} = 10^{24}$) различных вариантов усложнения. Среди них только один соответствует чисто колебательному (на всех десяти этапах), а другой (тоже один) — чисто бифуркационному типу развития.

Почти очевидно, что реальные системы реализуют все мыслимые возможности, хотя, конечно, часть таких путей и может приводить к эволюционным тупикам.

Общий закон эволюции — индивидуальный путь развития повторяет путь развития вида — ставит перед математикой весьма своеобразную задачу.

Дело в том, что повторение происходит по весьма «сокращенной стенограмме» — месяцы вместо миллиардов лет. Это почти на-

верняка означает, что индивидуальный путь развития сливает в одно несколько (быть может весьма много) различных этапов усложнения.

Математически это может означать путь эволюции через точку высокой кратности — высокой сложности.

Эти соображения стимулируют изучение окрестности сложных особых точек, например таких, как точка C на рис. 8. Точка C является точкой пересечения двух линий

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} \lambda = p(\alpha_1, \alpha_2) = 0, \\ \mu(\alpha_1, \alpha_2) = 0. \end{array} \right\} \quad (24)$$

Это означает, что в ней одновременно обращается в нуль один из действительных корней и становится чисто мнимым один из комплексных корней.

Подобные точки допускают весьма полное исследование и тесно связаны с любопытной механической задачей

$$\ddot{x} + \omega^2 \dot{x} = \varepsilon f(x, \dot{x}, \ddot{x}). \quad (25)$$

Число возможных разнообразных типов кинетики увеличивается очень существенно и достигает полутора десятков вместо двух (или четырех) типов кинетики в обычных точках возмущения колебаний.

Заметим, что даже если не принимать во внимание доводы относительно возможной роли подобных систем в математических моделях биологических систем, изучение таких систем представляет содержательную математическую задачу.

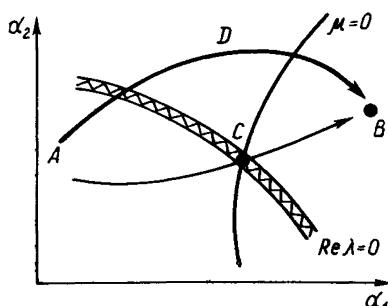


Рис. 8. Последовательный (видовой) АДВ и параллельный (индивидуальный) АСВ пути развития. Необходимость пройти через точку C высокой степени критичности.

верняка означает, что индивидуальный путь развития сливает в одно несколько (быть может весьма много) различных этапов усложнения.

Математически это может означать путь эволюции через точку высокой кратности — высокой сложности.

Эти соображения стимулируют изучение окрестности сложных особых точек, например таких, как точка C на рис. 8. Точка C является точкой пересечения двух линий

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} \lambda = p(\alpha_1, \alpha_2) = 0, \\ \mu(\alpha_1, \alpha_2) = 0. \end{array} \right\} \quad (24)$$

Это означает, что в ней одновременно обращается в нуль один из действительных корней и становится чисто мнимым один из комплексных корней.

Подобные точки допускают весьма полное исследование и тесно связаны с любопытной механической задачей

$$\ddot{x} + \omega^2 \dot{x} = \varepsilon f(x, \dot{x}, \ddot{x}). \quad (25)$$

Число возможных разнообразных типов кинетики увеличивается очень существенно и достигает полутора десятков вместо двух (или четырех) типов кинетики в обычных точках возмущения колебаний.

Заметим, что даже если не принимать во внимание доводы относительно возможной роли подобных систем в математических моделях биологических систем, изучение таких систем представляет содержательную математическую задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Молчанов А. М. Математические модели в экологии. Роль критических режимов.— В кн.: Математическое моделирование в биологии. М., «Наука», 1975, с. 133—141.
2. Austin M. P., Cook B. G. Ecosystem stability.— J. Theor. Biol., 1974, N 45, p. 435—458.
3. Молчанов А. М. Индогенные биохимические колебания как возможная основа физиологических ритмов.— Биофизика, 1971, **16**, с. 878—883.
4. Сельков Е. Е. Автоколебания в гликолизе. Простая одночастотная модель.— Молекулярная биология, 1968, № 2, с. 252—266.
5. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Т. 1. Изд. 2. М.—Л., ГИТТЛ, 1949, с. 233—241.
6. Андронов А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.—Л., ОНТИ, 1937. 519 с.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., ГИТТИ, 1963. 406 с.
8. Молчанов А. М. Нормальная форма нелинейной системы. Препринт ИПМ № 6, М., 1969. 32 с.
9. Молчанов А. М. Критические точки биологических систем. (Математические модели). — В кн.: Математическое моделирование в биологии. М., «Наука», 1975, с. 142—153.